1 Symetrie a zákony zachování

Symetrie jsou nejvýznamější vlastnosti systémů, které zjednodušují fyzikální problematiky. Symetrie a zákony zachování jsou v klasické mechanice spojeny s invariancí H vůči grupám transoframcí; ke každé transformaci, vůči které je H invariantní, existuje veličina, která se zachovává. Podobné tvrzení platí i v kvantové mechanice, kde jsou k prostoročasovým přidány ještě další transformace. Vzato ze skript UCJF.

2 Hamiltonův formalismus

V Hamiltonově formalismu se zavádí tzv. *kanonická hybnost* p_j

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \tag{1}$$

Formulka umožňuje zavedení kanonické hybnosti ke každé zobecněné souřadnici (tvoří pak tzv. kanonicky sdružený pár).

Definuje se fázový prostor: prostor popsaný nezávislými souřadnicemi q^j a p^j. Fázový prostor je prostorem fyzikálních stavů, jelikož každý bod popisuje jednoznačně a úplně stav systému (oproti konfiguračnímu prostoru z Lagrangeova formalismu). Časový vývoj systému tvoří trajektorii ve fázovém prostoru.

Hamiltonián H je zaveden

$$H(q^j, p_j, t) = \sum p_i \dot{q}^i - \mathcal{L} \tag{2}$$

s dosazením $\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^j, p_j, t)$ získané inverzí vztahu 1 pro kanonickou hybnost.

Hamiltonovy kanonické rovnice (pohybové) jsou

$$\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \tag{4}$$

Pro svou eleganci a užitek se zavádějí *Poissonovy závorky* předpisem

$$\{f, g\} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q^j} \tag{5}$$

Dá se ukázat, že mají spoustu zajímavých vlastností: jsou antisymetrické, jsou lineární v obou argumentech, platí pro ně Jacobiho identita a tvoří *Lieovu algebru* na fázovém prosotru

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{6}$$

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\} \tag{7}$$

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \tag{8}$$

$$\{f \cdot g, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\} \tag{9}$$

Pro kanonické souřadnice a hybnosti platí konkrétně vztahy (fundamentální Poissonovy závorky)

$$\{q^i, q^j\} = 0\ ; \quad \{p_i, p_j\} = 0\ ; \quad \{q^i, p_j\} = \delta^i_j \tag{10}$$

Pro skutečný pohyb a nějakou funkci $f(q^j, p_j, t)$ (MP: třeba fyzikální veličinu) na fázovém prostoru platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \tag{11}$$

V případně, že je tento výraz roven nule, je f integrálem pohybu. Pokud tato funkce navíc nezávisí na čase (tj. $f = f(q^j, p_j)$), vypadne člen s ∂ a bude platit zjednodušená podmínka: f je integrál pohybu $\Leftrightarrow \{f, H\} = 0$. Jednoduchým důsledkem je, že časově nezávislý H je integrálem pohybu. Navíc, pokud dvě funkce f a g jsou integrály pohybu, $\{f, g\}$ je taktéž.

Vzato ze zápisků z Teoretické mechaniky od Podolského.

2.1 Ekvivalence s kvantovou teorií

Bohužel nelze odvodit a ani uvést základy kvantové teorie v pár odstavcích, tak se budu věnovat stručně jen některým částem. V kvantové mechanice se namísto hodnot veličin vyšetřují střední hodnoty operátorů $\langle\Psi|A|\Psi\rangle = \langle A\rangle$.

V případě, že H nezávisí na čase je stav systému *stacionární*. Ve stacionárním stavu platí, že střední hodnoty veličin, které nezávisí explicitně na čase, jsou konstantní. Fyzikální veličiny mohou mít ostré hodnoty pouze tehdy, pokud jejich operátory komutují s H. Obdobně lze současně naměřit pouze ty veličiny, které spolu komutují.

V libovolném stavu (tedy i nestacionárním) je úplná časová derivace střední hodnoty operátoru (s použitím Schrödingerovy rovnice; zjevná korespondence s rovnicí 11)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = 0 \;\rightarrow\; \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle[A,H]\rangle = 0 \tag{12}$$

Pokud tedy $A \neq A(t)$ a komutuje s H (tj. $[A,H] = 0$, je A integrálem pohybu (její střední hodnota $\langle A\rangle$ se s časem nemění)

Homogenita času. V důsledku homogenity času nezávisí H libovolného uzavřeného systému (nepůsobí vnější síly) explicitně na čase. V kvantové mechanice se vyjádří komutační podmínkou

$$T_\tau t = t + \tau \;; \quad [T_\tau, H] = 0 \tag{13}$$

Obdobně se vyjádří i ostatní symetrie ekvivalentně s klasickou teorií (Lagr. formalismus, nebo Poissonovy závorky, rovnice 11). Např. ZZ hybnosti

$$P = \sum p_i\,,\; \partial_t P = 0\;; \quad [P,H] = 0 \tag{14}$$

Vzato z Davydova.

Trochu příbuzné: Hellman-Feynmanův teorém:

$$\frac{\mathrm{d}\langle H(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle\Psi|\partial_t H(t)|\Psi\rangle \tag{15}$$

t nemusí znamenat jen čas, ale obecný parametr. Rovnost platí jednoduše z toho, že $[H,H] = 0$.

3 Lagrangeův formalismus

3.1 Hamiltonův variační princip

Hamiltonův variační princip vychází z Lagrangeova formalismu. Zavádí se akce

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q^j_{(t)}, \dot{q}^j_{(t)}, t)dt \tag{16}$$

která má rozměr $J \cdot s$. Do této definice se tedy dosadí jak $\mathcal{L}$, tak i určitá trajektorie. Podle Hamiltonova variačního principu pak platí, že akce skutečné trajektorie (té realizované) nabývá stacionární hodnoty. Stručněji: variace akce je pro skutečné trajektorie nulová.

$$\delta S = 0 \tag{17}$$

3.2 Teorém Emmy Noetherové

Teorém Emy Noetherové: Má-li systém, a tím i jeho $\mathcal{L}$ nějakou symetrii, pak existuje jí odpovídající fyzikální veličina, která se zachovává. Konkrétně, pokud akce $dS = \mathcal{L}dt$ nezmění svůj tvar (je invariantní) při infinitezimálních transformacích času a zobecněných souřadnic

$$t \;\rightarrow\; t' = t + \varepsilon\Theta \tag{18}$$

$$q^j \;\rightarrow\; q'^j = q^j + \varepsilon Q^j \tag{19}$$

kde ε je malý parametr a Θ a Q^j libovolné hladké funkce, zachovává se veličina tvaru

$$\mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^j}(\dot{q}^j\Theta - Q^j) - \mathcal{L}\Theta \tag{20}$$

Podle typu symetrie se zachovávají různé veličiny:

zachovávaná veličina	symetrie
energie	homogenita času
hybnost	homogenita prostoru
moment hybnosti	izotropie prostoru
těžitě	ekvivalence inerciálních soustav
parita	pravo-levá symetrie prostoru
spin	Lorenzova transformace

3.2.1 Hlavní globální symetrie podrobněji

Homogenita prostoru : invariance vůči posunu v prostoru v kartézském směru $q^i = x^i$

$$t' = t \quad \cdots \quad \Theta = 0 \tag{21}$$
$$x'^i = x^i + \varepsilon \quad \cdots \quad Q^i = 1 \tag{22}$$
$$\mathcal{Z} \quad = \quad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \tag{23}$$

což dává ZZ Hybnosti. $\mathcal{L}$ může být např.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots \quad \mathcal{Z} = -m\dot{x} \tag{24}$$

Izotropie prostoru dává invarianci vůči rotaci (úhlový směr ϕ).

$$t' = t \quad \cdots \quad \Theta = 0 \tag{25}$$
$$\phi' = \phi + \varepsilon \quad \cdots \quad Q^i = 1 \tag{26}$$
$$\mathcal{Z} \quad = \quad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \tag{27}$$

což dá ZZ momentu hybnosti. $\mathcal{L}$ může být např.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad \cdots \quad \mathcal{Z} = -mr^2\dot{\phi} \tag{28}$$

Homogenita času dává invarianci vůči "časové translaci" (je jedno, kdy se zapnou stopky).

$$t' = t + \varepsilon \quad \cdots \quad \Theta = 1 \tag{29}$$
$$q'^i = q^i \quad \cdots \quad Q^i = 0 \tag{30}$$
$$\mathcal{Z} \quad = \quad \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^j - \mathcal{L} = h \tag{31}$$

čehož plyne ZZ energie (h je tzv. zobecněná energie).

Vzato ze zápisků z Teoretické mechaniky od Podolského.